შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	21.04.2012/ მათ/ I/ 015

ამოცანა № 1 გვერდი № 1

განვიხილოთ ΔEMH: $N \in EH$, $EN=NH$. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $EH=2MN$ ანუ რომ $MN=EN=NM$, ეს კი იმის ტოლფასია, რომ ΔEMH მართკუთხაა, ანუ $\angle EMH=90^\circ$. ე.ი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\angle EMH=90^\circ$, ანუ რომ $FE \perp KH$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 015

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$a-b=a^nc-b^nd$ თუ $a=b$ მაშინ $a=0$ და $b=0$, მაშინ $\sqrt[n]{|a-b|}=\sqrt[n]{0}$. ახლა განვიხილოთ $a\neq b$. რადგან $|c-d|=1$, ამიტომ გვაქვს ორი შემთხვევა: $d=c-1$ ან $d=c+1$.
ანუ $a-b=a^nc-b^nc+b^n$ ან $a-b=a^nc-b^nc-b^n$.
ორივე შემთხვევაში ტოლობის მარცხენა მხარე არის $a-b$. ხოლო მარჯვენა მხარე არის $c(a^n-b^n)\pm b^n$. ცხადია რომ $c(a^n-b^n) \vdots (a-b)$ ამიტომ b^n-იც იყოფა $(a-b)$-ზე, მივიღეთ რომ $b^n \vdots (a-b)$. $u\equiv$ უსგ(a,b), $a=ua_1$, $b=ub_1$. მაშინ $b^n \vdots (a-b) \Leftrightarrow u^nb_1^n \vdots u(a_1-b_1) \Leftrightarrow u^{n-1}b_1^n \vdots (a_1-b_1)$
შევნიშნოთ, რომ უსგ$(b_1,a_1-b_1)=$ უსგ$(b_1,a_1)=1$ ამიტომ
$u^{n-1}b_1^n \vdots (a_1-b_1) \Leftrightarrow u^{n-1} \vdots (a_1-b_1) \Leftrightarrow u^n \vdots (a-b) \Leftrightarrow u^n=k(a-b)$
მივიღეთ რომ $u^n=k(a-b)$ რაიმე მთელი k-სთვის. მაშინ ავიღოთ და ჩავსვათ საწყის ტოლობაში $a^n=u^na_1^n=(a-b)^nk^na_1^n$ და $b^n=u^nb_1^n=(a-b)^nk^nb_1^n$. მივიღებთ: $a-b=(a-b)^nk^na_1^nc-(a-b)^nk^nb_1^nd$
ე.ი. $(a-b)=(a-b)^nk^n(a_1^nc-b_1^nd)$ და რადგან $a\neq b$ შეგვიძლია ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $(a-b)$-ზე, რითაც მივიღებთ:

$$1=(a-b)^{n-1}k^n(a_1^nc-b_1^nd)$$

აქ ყველა წევრი მთელი რიცხვია, ამიტომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ყველა თანამამრავლი მოდულით 1-ის ტოლია. ე.ი. $|(a-b)^{n-1}|=1 \xRightarrow{\text{თუ } n>1} |a-b|=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[n]{|a-b|}=\sqrt[n]{1}=1$ ანუ $\sqrt[n]{|a-b|}$ მთელი რიცხვია.
ახლა განვიხილოთ შემთხვევა როცა $n=1$-ს.

მაშ, თუ $n=1$-ს, სასურველი წყვილები არსებობს

$a-b = ac-bd$

$d=c-1$ ან $d=c+1$

ანუ $(a-b)=(a-b)c+b$ ან $(a-b)=(a-b)c-b$.

$b \vdots (a-b)$ ანალოგიურად $a \vdots (a-b)$, $b=(a-b)p$, $a=(a-b)q$.

მაშინ $(a-b)=(a-b)qc-(a-b)pd$. ← სასურველი წყვილებიდან

$1=qc-pd$

ხოლო $a-b=(a-b)q-(a-b)p$

~~$a-b=(a-b)q-(a-b)p$~~

$\boxed{1=q-p}$

გამოდის რომ $|c-d|=1$

და $|q-p|=1$.

მაშინ შეუძლებელია რომ $1=qc-pd$.

ე.ი. n არ შეიძლება 1-ის ტოლი იყოს.

ხოლო $n>1$-ისათვის დამტკიცებული მაქვს.