

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო
ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/

015

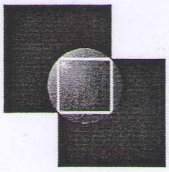
ამოცანა №

1

გვერდი №

1

განვიხილოთ $\triangle EMM$: $N \in EH$, $EN = NH$. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ,
რომ $EH = 2MN$ ანუ რომ $MN = EN = NM$, ეს კი იმსოცხვას,
რომ $\triangle EMM$ მსაგვსაა, ანუ $\angle EMM = 90^\circ$. ე.ი. უნდა დავამტკი-
ცოთ, რომ $\angle EMM = 90^\circ$, ანუ რომ $FE \perp KH$.



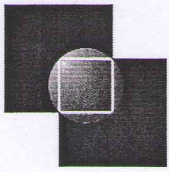
მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 015

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$a-b = a^n c - b^n d$ თუ $a=b$ მაშინ $a=0$ და $b=0$, ~~და~~ მაშინ
 $\sqrt{|a-b|} = \sqrt{0}$. ახლა განვიხილოთ $a \neq b$. ჩვენს $|c-d|=1$,
 ამიტომ ვვარაუდობთ შემთხვევებს: $d=c-1$ ან $d=c+1$.
 ანუ $a-b = a^n c - b^n c + b^n$ ან $a-b = a^n c - b^n c - b^n$.
 თანაც შემთხვევაში ცალკეობს დასტავება ანაზა ანა $a-b$.
 ხოლო დასტავება ანაზა ანა $c(a^n - b^n) \pm b^n$. ანაზა ჩამ
 $c(a^n - b^n) : (a-b)$ ამიტომ b^n -ის იყოს $(a-b)$ -ზე, მივიღებ
 ჩამ $b^n : (a-b)$. $u = \text{უს}(a, b)$, $a = u a_1$, $b = u b_1$. მაშინ
 $b^n : (a-b) \Leftrightarrow u^n b_1^n : u(a_1 - b_1) \Leftrightarrow u^{n-1} b_1^n : (a_1 - b_1)$
 შევნიშნოთ, ჩამ $\text{უს}(b_1, a_1 - b_1) = \text{უს}(b_1, a_1) = 1$ ამიტომ
 $u^{n-1} b_1^n : (a_1 - b_1) \Leftrightarrow u^{n-1} : (a_1 - b_1) \Leftrightarrow u^n : (a-b) \Leftrightarrow u^n = k(a-b)$
 მივიღებ ჩამ $u^n = k(a-b)$ ჩამა დათი k -სავით. მაშინ ავიღებ
 და ჩავსვამ სავით ცალკეობაში $a^n = u^n a_1^n = (a-b)^n k^n a_1^n$
 და $b^n = u^n b_1^n = (a-b)^n k^n b_1^n$. მივიღებ: $a-b = (a-b)^n k^n a_1^n c - (a-b)^n k^n b_1^n d$
 ა.ი. $(a-b) = (a-b)^n k^n (a_1^n c - b_1^n d)$ და ჩვენს $a \neq b$ შევნიშნოთ
 ცალკეობს თანაც ანაზა ვაყვით $(a-b)$ -ზე, ჩამა მივიღებ:
 $1 = (a-b)^{n-1} k^n (a_1^n c - b_1^n d)$ ან ყვანა სავით დათი
 ჩვენს, ამიტომ ცალკეობს დასტავება ანაზა ყვანა ანაზა ანაზა
 ანაზა 1 -ის ცალკეობს. ა.ი. $|a-b|^{n-1} = 1 \Rightarrow \sqrt[n-1]{|a-b|} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{|a-b|} = \sqrt{1} = 1$ ანუ $\sqrt{|a-b|}$ დათი ჩვენს.
 ანაზა განვიხილოთ შემთხვევა ჩამა $n=1$ -ს.



მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 015

ამოცანა №

3

გვერდი №

2

მაშინ, თუ $n=1 \rightarrow$ a და b უცვლელია

$$a - b = ac - bd$$

$$d = c - 1 \quad \text{ან} \quad d = c + 1$$

$$\text{ან} \quad (a - b) = (a - b)c + b \quad \text{ან} \quad (a - b) = (a - b)c - b.$$

$$b : (a - b) \quad \text{ან} \quad a : (a - b), \quad b = (a - b)p, \quad a = (a - b)q.$$

$$\text{მაშინ} \quad (a - b) = (a - b)qc - (a - b)pd. \quad \leftarrow \text{სწორი ცხვენა}$$

$$1 = qc - pd$$

~~$$a - b = (a - b)q - (a - b)p$$~~

$$\text{ან} \quad a - b = (a - b)q - (a - b)p$$

$$\boxed{1 = q - p}$$

გამოვიყენოთ h $|c - d| = 1$

$$\text{ან} \quad |q - p| = 1.$$

$$\text{მაშინ} \quad \text{შედეგად} \quad h \text{ $1 = qc - pd$.$$

ე.ი. n h შედეგად 1 -ის ცხვენა.

ან $n > 1$ - ისთვის დასაბუთებული

გვაქვს.